Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalităţi de lucru diferenţiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediţia a II-a,
revizuită și adăugită

ÎNVĂȚARE DE INIȚIERE ®
susținere, remediere

Editura Paralela 45

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL III. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

CAPITOLUL IV. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE

GEOMETRIE

CAPITOLUL II. TRIUNGHIUL

ALGEBRĂ

Capitolul III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg

Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+" în față: +1, +2, +3, … se numesc numere întregi pozitive. Mulţimea numerelor întregi pozitive se notează cu $\mathbb{Z}_+$, deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ şi avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „–" în față: –1, –2, –3, … se numesc numere întregi negative. Mulţimea numerelor întregi negative se notează cu $\mathbb{Z}_-$, deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$ şi se defineşte astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulţimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numeşte mulţimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparţin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiţie: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înţelegem numărul întreg $-a$. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg –5.
Opusul numărului întreg –8 este numărul întreg 8.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulţimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;

b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

Soluție:

a) $E = \{15, 8\}$; b) $F = \{-6, -21\}$.

2. Scrieţi opusele următoarelor numere întregi:

a) –9; b) 0; c) 17; d) –11.

Soluție:

a) 9; b) 0; c) –17; d) 11.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți mulțimile următoare:

a) $\mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_-$; c) $\mathbb{Z}^*$; d) $\mathbb{Z}$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-25 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ b) $42 \in \mathbb{Z}_+$; ☐ c) $51 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ d) $-71 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐

e) $49 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐ f) $-28 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ g) $-35 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ h) $87 \in \mathbb{Z}_+$. ☐

3. Se consideră mulțimea $A = \{-2, 4, -5, 7, 8, -1, 0, -13, 12, -9\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

a) b)

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $7 \in \mathbb{N}$; ☐ b) $-9 \in \mathbb{N}$; ☐ c) $12 \in \mathbb{Z}$; ☐ d) $-5 \in \mathbb{Z}$; ☐

e) $0 \notin \mathbb{Z}$; ☐ f) $0 \in \mathbb{Z}^*$; ☐ g) $0 \notin \mathbb{Z}^*$; ☐ h) $0 \in \mathbb{Z}$. ☐

5. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) Mulțimea $\mathbb{Z}_+$ este finită. ☐ b) Mulțimea $\mathbb{Z}_-$ este finită. ☐

c) Mulțimea $\mathbb{Z}^*$ este infinită. ☐ d) Mulțimea $\mathbb{Z}$ este infinită. ☐

6. Se consideră mulțimea $E = \{-15, 0, 6, -8, 2, 17\}$. Determinați următoarele mulțimi:

a) $E \cap \mathbb{Z}_-$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+$; c) $E \cap \mathbb{Z}^*$; d) $E \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^*$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ b) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ d) $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$. ☐

Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^* = \varnothing$; ☐ b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$; ☐ c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$; ☐ d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^* = \{0\}$. ☐

9. Completați tabelul următor:

Numărul	43	–7	–25	134	0	–91	–72	64	–8
Opusul									

10. Completați tabelul următor:

Numărul	–6			201		–18			92
Opusul		42	–58		307		–9	83	

11. Se consideră mulţimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinaţi mulţimea $B = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in A\}$.

12. Se consideră mulţimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinaţi mulţimea $F = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in E\}$.

13. Temperaturile maxime pe ţară înregistrate la ora 13 în zilele de 20 şi 21 ianuarie sunt reprezentate de două numere întregi opuse, impare şi consecutive. Precizaţi cele două valori de temperatură.

14. Temperaturile minime pe ţară înregistrate la ora 7 în zilele de 15 şi 16 martie sunt reprezentate de două numere întregi consecutive şi prime. Precizaţi cele două valori de temperatură.

15. Se consideră mulţimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ şi $B = \{b \mid b$ este opusul lui $a, a \in A\}$. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora.

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Se consideră numărul întreg $a = -\underbrace{(-(-(-...(-1)...)))}_{100 \text{ paranteze}}$. Scrieţi sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg a.

17. Se consideră numărul întreg $x = -\underbrace{(-(-(-...(-1)...)))}_{106 \text{ paranteze}}$. Scrieţi sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg x.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră mulţimea $A = \{-13, -2, 8, 0, 11, -10\}$. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora.

a) $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \in A\}$; b) $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \in A\}$; c) $A_3 = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in A\}$.

(3p) **2.** Scrieţi opusele următoarelor numere întregi:

a) 87; b) –705; c) 101.

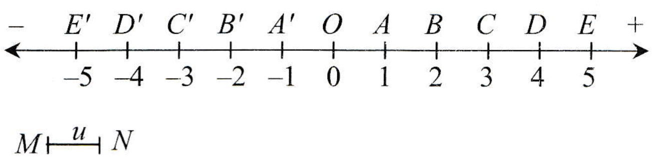
(3p) **3.** Efectuaţi:

a) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+$; c) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_-$.

Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor

Citesc şi reţin

Pe o dreaptă d se fixează un punct O numit origine, se stabileşte un sens pozitiv (de la origine spre dreapta), un sens negativ (de la origine spre stânga) şi se alege o unitate de măsură (un segment MN de lungime u). Cu aceste trei proprietăţi, dreapta d se numeşte axa numerelor.



Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor.

Oricărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă, numărul întreg numindu-se coordonata punctului respectiv. Coordonata punctului O este numărul întreg 0.

Exemple: Numărul întreg 4 este coordonata punctului D.
Numărul întreg –1 este coordonata punctului A'.

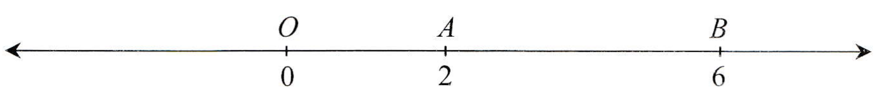
Observaţie: Două puncte de pe axa numerelor, care au drept coordonate două numere întregi opuse, sunt simetrice în raport cu originea axei.

Exemplu: Punctul C' este simetricul punctului C faţă de punctul O în figura de mai sus.

Cum se aplică?

1. Punctele A şi B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O şi au coordonatele 2, respectiv 6. Dacă $AB = 28$ mm, aflaţi OA şi OB.

Soluție:



Mai întâi aflăm lungimea unităţii de măsură pe care o notăm cu x. $AB = OB - OA = 6x - 2x = 4x$, deci $4x = 28$ mm şi obţinem $x = 7$ mm, prin urmare $OA = 2 \cdot 7$ mm $= 14$ mm şi $OB = 6 \cdot 7$ mm $= 42$ mm.

2. Punctele A şi A' sunt reprezentate pe axa numerelor şi sunt simetrice în raport cu originea axei O. Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm şi $AA' = 10$ cm, determinaţi coordonatele punctelor A şi A'.

Soluție:

Notăm $OA = OA' = x$, deci $AA' = 2x$ sau $2x = 10$ cm, de unde rezultă că $x = 5$ cm şi, cum $u = 1$ cm, deducem că cele două puncte au coordonatele 5 şi –5, sau –5 şi 5.

Ştiu să rezolv

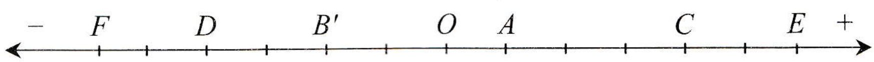
Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă notăm cu O originea axei numerelor, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) Coordonata punctului O este 1. ☐ b) Coordonata punctului O este 0. ☐

2. Reprezentaţi pe axa numerelor următoarele numere întregi, alegând unitatea de măsură de 1 cm:
a) –2, 4, –5, 0, 1, –6; b) 6, –5, 8, –3, –4, 2;
c) –7, 2, –9, 6, 0, –1; d) 4, –9, –3, 1, 7, –5.

3. Reprezentaţi pe axa numerelor următoarele numere întregi:
a) –10, –13, 17, 14, –15; b) 11, –19, 20, –12, –16.

4. Precizaţi coordonatele punctelor din figura de mai jos, ştiind că punctul O este originea axei numerelor:



5. Reprezentaţi pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
a) 2, –3, –5, 6; b) 3, 7, –4, –2.

6. Reprezentaţi pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
a) –16, 0, 14, –12, 15, –11; b) –8, 13, 9, –10, 16, –13.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Punctele E şi F sunt reprezentate pe axa numerelor şi sunt simetrice în raport cu originea axei O. Determinaţi coordonata punctului F, dacă coordonata punctului E este:
a) 8; b) –3; c) –5; d) 4.

8. Punctele C şi D sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O şi au coordonatele –3, respectiv 1. Determinaţi lungimea unităţii de măsură ştiind că:
a) CD = 4 cm; b) CD = 8 cm; c) CD = 10 cm.

9. Punctele A şi B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O şi au coordonatele 3, respectiv 8. Dacă AB = 40 mm, aflaţi OA şi OB.

10. Punctele M şi M' sunt reprezentate pe axa numerelor şi sunt simetrice în raport cu originea axei O. Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm şi MM' = 8 cm, determinaţi coordonatele punctelor M şi M'.

11. Punctele E şi F sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O şi au coordonatele 4, respectiv –5. Dacă EF = 63 mm, aflaţi OE şi OF.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

12. Punctele M şi N sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O şi au coordonatele –2, respectiv –9. Dacă ON = 45 mm, aflaţi MN.

13. Pe axa numerelor, folosind o unitate de măsură de 1 cm, sunt reprezentate punctele E, cu coordonata număr întreg negativ, şi F, cu coordonata număr întreg pozitiv. Dacă $EF = 5$ cm, determinaţi coordonatele celor două puncte.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** În figura următoare punctele A, B şi C sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O. Precizaţi coordonata:
a) punctului A; b) punctului B; c) punctului C.

(3p) **2.** Reprezentaţi pe axa numerelor, alegând unitatea de măsură de 1 cm, următoarele numere întregi: -5, 4, 6, -2.

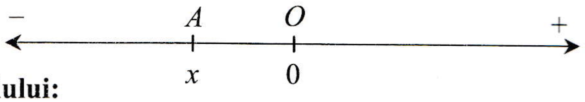
(3p) **3.** Punctele E şi F sunt reprezentate pe axa numerelor şi sunt simetrice în raport cu originea axei O. Ştiind că unitatea de măsură are lungimea de 2 cm şi $EF = 12$ cm, determinaţi coordonatele punctelor E şi F.

Lecţia 3. Valoarea absolută a unui număr întreg. Compararea şi ordonarea numerelor întregi

Citesc şi reţin

Definiţie: Distanţa, măsurată pe axa numerelor, între origine şi punctul a cărui coordonată este numărul întreg x, se numeşte **modulul (valoarea absolută)** lui x şi se notează $|x|$.

$|x| = OA$



Proprietăţile modulului:

1. $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
2. $|x| = 0$, dacă $x = 0$.
3. $|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
4. $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0; \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$

Exemple: $|23| = 23$; $|0| = 0$; $|-8| = 8$.

Compararea numerelor întregi

- Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât 0.
- Orice număr întreg negativ este mai mic decât 0.
- Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât orice număr întreg negativ.