

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediția a II-a,
revizuită și adăugită

ÎNVĂȚARE DE ÎNȚIERE[®]

sustinere, remediere



Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg	5
<i>Test de evaluare stadială</i>	7
Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor	8
<i>Test de evaluare stadială</i>	10
Lecția 3. Valoarea absolută a unui număr întreg.	
Compararea și ordonarea numerelor întregi.	10
<i>Test de evaluare stadială</i>	13
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	13
Lecția 4. Adunarea numerelor întregi. Proprietățile adunării	14
<i>Test de evaluare stadială</i>	17
Lecția 5. Scăderea numerelor întregi	17
<i>Test de evaluare stadială</i>	19
Lecția 6. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietățile înmulțirii	20
<i>Test de evaluare stadială</i>	22
Lecția 7. Împărțirea numerelor întregi	23
<i>Test de evaluare stadială</i>	25
Lecția 8. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg	25
<i>Test de evaluare stadială</i>	28
Lecția 9. Reguli de calcul cu puteri	28
<i>Test de evaluare stadială</i>	30
Lecția 10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor cu numere întregi	31
<i>Test de evaluare stadială</i>	34
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	34
Lecția 11. Ecuații în \mathbb{Z}	35
<i>Test de evaluare stadială</i>	38
Lecția 12. Inecuații în \mathbb{Z}	38
<i>Test de evaluare stadială</i>	40
Lecția 13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor	41
<i>Test de evaluare stadială</i>	44
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	44
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	45
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	47

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Lecția 14. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional	49
<i>Test de evaluare stadială</i>	53
Lecția 15. Compararea numerelor raționale	54
<i>Test de evaluare stadială</i>	58
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	58
Lecția 16. Adunarea numerelor raționale. Proprietățile adunării	60
<i>Test de evaluare stadială</i>	64
Lecția 17. Scăderea numerelor raționale	64

Test de evaluare stadială	68
Lecția 18. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietățile înmulțirii	68
Test de evaluare stadială	72
Lecția 19. Puterea cu exponent natural a unui număr rațional	73
Test de evaluare stadială	76
Lecția 20. Împărțirea numerelor raționale	77
Test de evaluare stadială	81
Lecția 21. Ordinea efectuării operațiilor	81
Test de evaluare stadială	85
Teste de evaluare sumativă	85
Lecția 22. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$), unde a , b și c sunt numere raționale	86
Test de evaluare stadială	91
Lecția 23. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	91
Test de evaluare stadială	94
Teste de evaluare sumativă	94
Fișă pentru portofoliul elevului	96
Model de test pentru Evaluarea Națională	98

GEOMETRIE

CAPITOLUL II. TRIUNghiUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare	100
Test de evaluare stadială	103
Lecția 2. Elemente de raționament geometric	104
Test de evaluare stadială	106
Lecția 3. Perimetrul triunghiului	106
Test de evaluare stadială	108
Lecția 4. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	109
Test de evaluare stadială	111
Lecția 5. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	111
Test de evaluare stadială	114
Lecția 6. Construcția triunghiurilor: cazurile L.U.L., U.L.U. și L.L.L.	114
Test de evaluare stadială	116
Lecția 7. Inegalități între elementele triunghiului	116
Test de evaluare stadială	118
Lecția 8. Concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi ...	118
Test de evaluare stadială	121
Lecția 9. Concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi	121
Test de evaluare stadială	124
Lecția 10. Înălțimile unui triunghi. Concurența înălțimilor unui triunghi	124
Test de evaluare stadială	127
Lecția 11. Medianele unui triunghi. Concurența medianelor unui triunghi	127
Test de evaluare stadială	129
Teste de evaluare sumativă	130
Lecția 12. Congruența triunghiurilor oarecare	131
Test de evaluare stadială	133
Lecția 13. Criteriile de congruență a triunghiurilor	133
Test de evaluare stadială	136
Lecția 14. Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice	136

<i>Test de evaluare stadială</i>	140
Lecția 15. Metoda triunghiurilor congruente	140
<i>Test de evaluare stadială</i>	143
Lecția 16. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi.....	144
<i>Test de evaluare stadială</i>	146
Lecția 17. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.....	147
<i>Test de evaluare stadială</i>	149
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	149
Lecția 18. Proprietăți ale triunghiului isoscel	151
<i>Test de evaluare stadială</i>	155
Lecția 19. Proprietăți ale triunghiului echilateral	155
<i>Test de evaluare stadială</i>	159
Lecția 20. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	160
<i>Test de evaluare stadială</i>	165
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	165
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	166
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	168
MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL AL II-LEA	170
TESTE DE EVALUARE FINALĂ	172
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	175

ALGEBRĂ

Capitolul III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi.

Opusul unui număr întreg



Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+” în față: $+1, +2, +3, \dots$ se numesc numere întregi pozitive. Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu \mathbb{Z}_+ , deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ și avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „-” în față: $-1, -2, -3, \dots$ se numesc numere întregi negative. Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu \mathbb{Z}_- , deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu \mathbb{Z} și se definește astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numește mulțimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparțin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiție: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înțelegem numărul întreg $-a$.
Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg -5 .

Opusul numărului întreg -8 este numărul întreg 8.



Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinați mulțimile:

a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\};$

b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}.$

Soluție:

a) $E = \{15, 8\};$

b) $F = \{-6, -21\}.$

2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

a) $-9;$

b) 0;

c) 17;

d) $-11.$

Soluție:

a) 9;

b) 0;

c) $-17;$

d) 11.

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți mulțimile următoare:

- a) \mathbb{Z}_+ ; b) \mathbb{Z}_- ; c) \mathbb{Z}^* ; d) \mathbb{Z} .

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $-25 \in \mathbb{Z}$; b) $42 \in \mathbb{Z}_+$; c) $51 \notin \mathbb{Z}$; d) $-71 \notin \mathbb{Z}_+$;
 e) $49 \notin \mathbb{Z}_+$; f) $-28 \in \mathbb{Z}$; g) $-35 \notin \mathbb{Z}$; h) $87 \in \mathbb{Z}_+$.

3. Se consideră mulțimea $A = \{-2, 4, -5, 7, 8, -1, 0, -13, 12, -9\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

- a) $A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

a)																			
b)																			

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $7 \in \mathbb{N}$; b) $-9 \in \mathbb{N}$; c) $12 \in \mathbb{Z}$; d) $-5 \in \mathbb{Z}$;
 e) $0 \notin \mathbb{Z}$; f) $0 \in \mathbb{Z}^*$; g) $0 \notin \mathbb{Z}^*$; h) $0 \in \mathbb{Z}$.

5. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) Mulțimea \mathbb{Z}_+ este finită. b) Mulțimea \mathbb{Z}_- este finită.
 c) Mulțimea \mathbb{Z}^* este infinită. d) Mulțimea \mathbb{Z} este infinită.

6. Se consideră mulțimea $E = \{-15, 0, 6, -8, 2, 17\}$. Determinați următoarele mulțimi:

- a) $E \cap \mathbb{Z}_-$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+$; c) $E \cap \mathbb{Z}^*$; d) $E \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^*$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}^*$; b) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}^*$; c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^*$; d) $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^* = \emptyset$; b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$; c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$; d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^* = \{0\}$.

9. Completați tabelul următor:

Numărul	43	-7	-25	134	0	-91	-72	64	-8
Opusul									

10. Completați tabelul următor:

Numărul	-6			201		-18			92
Opusul		42	-58		307		-9	83	

11. Se consideră mulțimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinați mulțimea $B = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in A\}$.

12. Se consideră mulțimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinați mulțimea $F = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E\}$.

13. Temperaturile maxime pe țară înregistrate la ora 13 în zilele de 20 și 21 ianuarie sunt reprezentate de două numere întregi opuse, impare și consecutive. Precizați cele două valori de temperatură.

14. Temperaturile minime pe țară înregistrate la ora 7 în zilele de 15 și 16 martie sunt reprezentate de două numere întregi consecutive și prime. Precizați cele două valori de temperatură.

15. Se consideră mulțimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ și $B = \{b \mid b \text{ este opusul lui } a, a \in A\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

- a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră numărul întreg $a = \underbrace{-(-(-(-\dots(-1)\dots)))}_{100 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg a .

17. Se consideră numărul întreg $x = \underbrace{-(-(-(-\dots(-1)\dots)))}_{106 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg x .



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră mulțimea $A = \{-13, -2, 8, 0, 11, -10\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

- a) $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \in A\}$; b) $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \in A\}$; c) $A_3 = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in A\}$.

(3p) **2.** Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

- a) 87; b) -705; c) 101.

(3p) **3.** Efectuați:

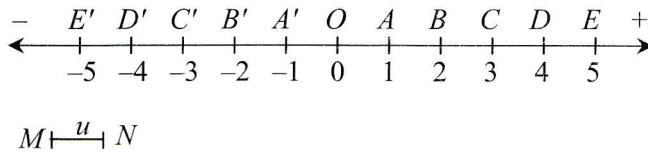
- a) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+$; c) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_-$.

Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor



Citesc și rețin

Pe o dreaptă d se fixează un punct O numit origine, se stabilește un sens pozitiv (de la origine spre dreapta), un sens negativ (de la origine spre stânga) și se alege o unitate de măsură (un segment MN de lungime u). Cu aceste trei proprietăți, dreapta d se numește axa numerelor.



Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor.

Oricărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă, numărul întreg numindu-se coordonata punctului respectiv. Coordonata punctului O este numărul întreg 0.

Exemple: Numărul întreg 4 este coordonata punctului D .

Numărul întreg -1 este coordonata punctului A' .

Observație: Două puncte de pe axa numerelor, care au drept coordonate două numere întregi opuse, sunt simetrice în raport cu originea axei.

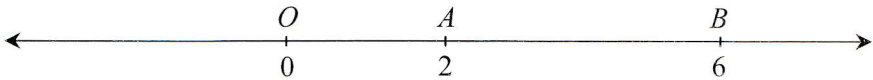
Exemplu: Punctul C' este simetricul punctului C față de punctul O în figura de mai sus.



Cum se aplică?

1. Punctele A și B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 2, respectiv 6. Dacă $AB = 28$ mm, aflați OA și OB .

Soluție:



Mai întâi aflăm lungimea unității de măsură pe care o notăm cu x . $AB = OB - OA = 6x - 2x = 4x$, deci $4x = 28$ mm și obținem $x = 7$ mm, prin urmare $OA = 2 \cdot 7$ mm = 14 mm și $OB = 6 \cdot 7$ mm = 42 mm.

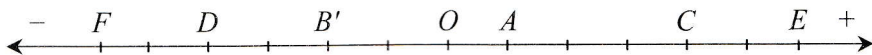
2. Punctele A și A' sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O . Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm și $AA' = 10$ cm, determinați coordonatele punctelor A și A' .

Soluție:

Notăm $OA = OA' = x$, deci $AA' = 2x$ sau $2x = 10$ cm, de unde rezultă că $x = 5$ cm și, cum $u = 1$ cm, deducem că cele două puncte au coordonatele 5 și -5 , sau -5 și 5.

Exerciții și probleme de dificultate minimă

- Dacă notăm cu O originea axei numerelor, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
 a) Coordonata punctului O este 1. b) Coordonata punctului O este 0.
- Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi, alegând unitatea de măsură de 1 cm:
 a) $-2, 4, -5, 0, 1, -6$; b) $6, -5, 8, -3, -4, 2$;
 c) $-7, 2, -9, 6, 0, -1$; d) $4, -9, -3, 1, 7, -5$.
- Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
 a) $-10, -13, 17, 14, -15$; b) $11, -19, 20, -12, -16$.
- Precizați coordonatele punctelor din figura de mai jos, știind că punctul O este originea axei numerelor:



- Reprezentați pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
 a) $2, -3, -5, 6$; b) $3, 7, -4, -2$.
- Reprezentați pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
 a) $-16, 0, 14, -12, 15, -11$; b) $-8, 13, 9, -10, 16, -13$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

- Punctele E și F sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O . Determinați coordonata punctului F , dacă coordonata punctului E este:
 a) 8; b) -3 ; c) -5 ; d) 4.
- Punctele C și D sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele -3 , respectiv 1 . Determinați lungimea unității de măsură știind că:
 a) $CD = 4$ cm; b) $CD = 8$ cm; c) $CD = 10$ cm.
- Punctele A și B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 3 , respectiv 8 . Dacă $AB = 40$ mm, aflați OA și OB .
- Punctele M și M' sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O . Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm și $MM' = 8$ cm, determinați coordonatele punctelor M și M' .
- Punctele E și F sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 4 , respectiv -5 . Dacă $EF = 63$ mm, aflați OE și OF .

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- Punctele M și N sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele -2 , respectiv -9 . Dacă $ON = 45$ mm, aflați MN .

13. Pe axa numerelor, folosind o unitate de măsură de 1 cm, sunt reprezentate punctele E , cu coordonata număr întreg negativ, și F , cu coordonata număr întreg pozitiv. Dacă $EF = 5$ cm, determinați coordonatele celor două puncte.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. În figura următoare punctele A , B și C sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O . Precizați coordonata:

- a) punctului A ; b) punctului B ; c) punctului C .



(3p) 2. Reprezentați pe axa numerelor, alegând unitatea de măsură de 1 cm, următoarele numere întregi: -5 , 4 , 6 , -2 .

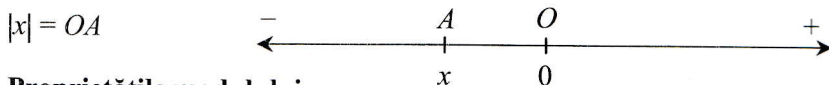
(3p) 3. Punctele E și F sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O . Știind că unitatea de măsură are lungimea de 2 cm și $EF = 12$ cm, determinați coordonatele punctelor E și F .

Lecția 3. Valoarea absolută a unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi



Citesc și rețin

Definiție: Distanța, măsurată pe axa numerelor, între origine și punctul a cărui coordonată este numărul întreg x , se numește **modulul (valoarea absolută)** lui x și se notează $|x|$.



Proprietățile modulului:

- $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
- $|x| = 0$, dacă $x = 0$.
- $|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
- $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0; \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

Exemple: $|23| = 23$; $|0| = 0$; $|-8| = 8$.

Compararea numerelor întregi

- Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât 0.
- Orice număr întreg negativ este mai mic decât 0.
- Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât orice număr întreg negativ.